5 Exercices

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2-3x+9\right)\ dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^5-2x^3\right)\ dx$
3. $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)^2\ dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^4 \left(x^2+4x-1\right)^3(x+2)\ dx$
5. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x^2}\ dx$
6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(4x-3)^3}\ dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\ dx$
8. $\displaystyle\int_{-1/3}^{20/3} \sqrt{3x+5}\ dx$
9. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\ dx$
10. $\displaystyle\int_{-\pi/8}^{\pi/4} \cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ dx$
11. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x+3}\ dx$
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx$

Exercice 2 soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).

1. Tracer $\mathcal{C}$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
4. Calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équations $x=2$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm). Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{3}{4}x$.

1. Etudier les variations de f et construire $\mathcal{C}$ et Δ dans le même repère après avoir étudié la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
2. Déterminer, en cm^2, l'aire de la surface délimitée par :
   (a) $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
   (b) $\mathcal{C}$ et Δ.
   (c) $\mathcal{C}$, Δ et les droites d'équations $x=-5$ et $x=4$.
   (d) $\mathcal{C}$, Δ, et l'axe des abscisses pou $x\in[0;3]$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\sqrt{x}$. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).

1. Tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la surface finie délimitée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ de la surface comprise entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ pour $x\in[0;2]$.
4. Calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ de la surface comprise entre $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et la droite d'équation $y=4$ pour $x\in[1;4]$.

Exercice 5 Soient f et g les fonctions définies sur $[0;2\pi]$ par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$.

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentatives respectivement de f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 1 cm sur Ox et 2 cm sur Oy).
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

3. Calculer, en cm^2 :
   (a) L'aire $\mathcal{A}_1$ de l'ensemble des points des points $M(x;y)$ tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
   (b) L'aire $\mathcal{A}_2$ de la surface délimitée par $\mathcal{C}_2$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{5\pi}{4}$
   (c) L'aire $\mathcal{A}_3$ de la surface délimitée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ entre leurs points d'intersection.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$ puis celle de g sur $\left[0;\frac{5\pi}{4}\right]$.

Exercice 6 Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm) on nomme Δ la droite d'équation $y = f(x) = \frac{1}{2}x$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{S}$ autour de Ox.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $[1;4]$ par $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm).
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $1 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{S}$ autour de Ox.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \sin x$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{S}$ autour de Ox.

Exercice 9 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 - \ln x$ et $g(x) = \ln^2 x$
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et par Γ celle de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).

1. Etudier les variations de f.
2. Etudier les variations de g.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $-$.
4. Tracer $\mathcal{C}$ et Γ.
5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = x + 1 + x\ln x - x\ln^2 x$.
   Calculer la dérivée de h. En déduire :
   (a) L'aire $\mathcal{A}_1$ de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\frac{1}{e^2} \leq x \leq e$ et $g(x) \leq y \leq f(x)$
   (b) L'aire $\mathcal{A}_2$ de la surface délimitée par $\mathcal{C}$ et Γ pour $x \in [1;3]$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).

1. Etudier les variations de f et construire $\mathcal{C}$.
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, Ox et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$