

4 Exercices

Exercice 1 Déterminer ensemble de définition et fonction dérivée de f dans les cas suivants :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f(x) = \ln(2x - 3)$ 2. $f(x) = \ln(3 - 2x)$ 3. $f(x) = \ln 2x - 3$ 4. $f(x) = \ln(2x^2 - 3x - 5)$ 5. $f(x) = \ln(x + 1) + \ln(2x - 5)$ 6. $f(x) = \ln(-2x^2 + 3x + 5)$ 7. $f(x) = \ln 2x^2 - 3x - 5$ 8. $f(x) = \ln \frac{2x + 1}{4x - 3}$ 9. $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(4x - 3)$ | <ol style="list-style-type: none"> 10. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ 11. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ 12. $f(x) = x \ln x$ 13. $f(x) = \ln x^4$ 14. $f(x) = (\ln x)^4$ 15. $f(x) = \frac{2 - \ln x}{3 + \ln x}$ 16. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ |
|---|---|

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\ln(2x - 3) = 0$ 2. $\ln(2x - 3) > 0$ 3. $\ln(5x + 4) = 1$ 4. $\ln(5x + 4) \leq 1$ 5. $\ln(x^2 + 3x - 4) - \ln 3 = \ln 2$ 6. $\ln(x - 1) - \ln 3 = \ln 2 - \ln(x + 4)$ 7. $2 \ln(x - 1) + \ln(6x + 9) = 2 \ln(2x + 3)$ 8. $2 \ln(x - 1) + \ln(6x + 9) \leq 2 \ln(2x + 3)$ | <ol style="list-style-type: none"> 9. $\frac{1}{2} \ln(3x - 1) + \frac{1}{2} \ln(8x - 2) = \ln(4x - 1)$ 10. $\ln(2 - x) + \ln(5 - x) \leq 2 \ln 2 + \ln 7$ 11. $\ln[x(3 - x)] \leq \ln 2$ 12. $2 \ln^2 x - 5 \ln x + 3 = 0$ 13. $2 \ln^2 x - 5 \ln x + 3 \leq 0$ 14. $-\ln^2 x - \ln x + 6 = 0$ 15. $-\ln^2 x - \ln x + 6 \leq 0$ |
|---|---|

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\begin{cases} 3 \ln x + 2 \ln y = 3 \\ 2 \ln y - 2 \ln x = -2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^2 = 3 \\ \ln y^2 - \ln x^2 = -2 \end{cases}$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\begin{cases} \ln y = 2 + \ln x \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$ |
|--|--|

Exercice 4 Déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f(x) = \frac{2}{x+1}$; $I =]-1; +\infty[$ 2. $f(x) = \frac{2}{x+1}$; $I =]-\infty; -1[$ 3. $f(x) = -\frac{3}{4x-1}$; $I = \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$ 4. $f(x) = -\frac{3}{4x-1}$; $I = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right[$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $f(x) = \frac{9}{2x+5}$; $I = \left] -\frac{5}{2}; +\infty \right[$ 6. $f(x) = \frac{9}{2x+5}$; $I = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right[$ 7. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$ 8. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $I =]0; +\infty[$ |
|--|--|

Exercice 5 Soit f définie sur $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[: f(x) = a + \frac{b}{3x+2}$

En déduire les primitives de f sur $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\left] -\frac{1}{3}; \frac{7}{4} \right[$ par $f(x) = \frac{36x^2 - 49x - 12}{12x^2 - 17x - 7}$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in \left] -\frac{1}{3}; \frac{7}{4} \right[: f(x) = a + \frac{b}{3x+1} + \frac{c}{4x-7}$

2. En déduire une primitive de f sur $\left] -\frac{1}{3}; \frac{7}{4} \right[$

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$ par $f(x) = \frac{8x^2 - 3}{(2x - 1)^2}$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[: f(x) = a + \frac{b}{2x - 1} + \frac{c}{(2x - 1)^2}$

2. En déduire une primitive de f sur $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$

Exercice 8 Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = 2 - \ln x$ et $g(x) = \ln^2 x$. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f et par Γ celle de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Etudier les variations de f .
2. Etudier les variations de g .
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et Γ .
4. Tracer \mathcal{C} et Γ .
5. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $h(x) = x + 1 + x \ln x - x \ln^2 x$
 - (a) Calculer la dérivée de h .
 - (b) En déduire une primitive de $f - g$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 9 Etudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$