

Fonction exponentielle

1 Définition

On a vu que la fonction \ln réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Cela signifie que pour tout réel λ , il existe un unique réel strictement positif α tel que $\ln \alpha = \lambda$.

Définition 1 La fonction exponentielle est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique réel strictement positif y tel que $\ln y = x$. Si on note cette fonction \exp on a donc

$$\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Remarque 1 $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

Remarque 2 $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$

Remarque 3 $\forall x \in \mathbb{R} : \ln[\exp(x)] = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \exp(\ln x) = x$

Remarque 4 On a vu que $\forall n \in \mathbb{Z} : \ln e^n = n$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = \exp(\ln e^n) = e^n$ d'après la remarque précédente.

D'où la notation : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$

Avec cette notation les propriétés de la fonction exponentielle sont donc :

$$\begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$$

$e^0 = 1$	$e^1 = e$	$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$
$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$		$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln x} = x$

2 Formule fondamentale

$\forall a \in \mathbb{R} ; \forall b \in \mathbb{R} : \ln e^{a+b} = a + b = \ln e^a + \ln e^b = \ln(e^a \cdot e^b)$ d'où :

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

On en déduit les résultats suivants, valables pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

3 Fonction exponentielle

Nous admettons que la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$. Par dérivation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$

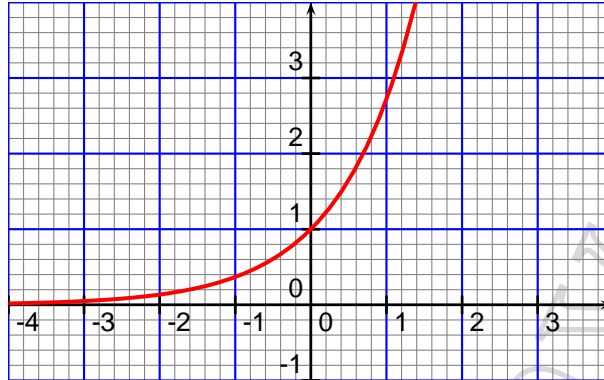
On a vu que $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

Nous admettons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		+
e^x	0	$\nearrow +\infty$

D'où la courbe représentative :



4 Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1 \quad (\text{rappel : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - \frac{\ln x}{x})} = +\infty \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0 \quad \text{d'après le résultat précédent.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

5 Dérivées - Primitives

On a vu que la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$.
Le théorème de dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

Théorème 1 Sur tout intervalle I où u est dérivable, e^u est dérivable et

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

On en déduit que e^u est une primitive sur I de $u' \cdot e^u$.

Exemple 1 e^{kx} est une primitive sur \mathbb{R} de $k \cdot e^{kx}$

Donc $\frac{1}{k} e^{kx}$ est une primitive sur \mathbb{R} de e^{kx} .

En particulier : $-e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de e^{-x}

$$\text{Exemple 2} \quad \int_0^{\ln 2} e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} e^{3 \ln 2} - \frac{1}{3} e^0 = \frac{1}{3} e^{\ln 2^3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

6 Exposant réel

Définition 2 Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b : $a^b = e^{b \ln a}$

Remarque 5 Cette définition est cohérente avec celle de a^n pour $n \in \mathbb{Z}$ car $a^n = e^{\ln a^n} = e^{n \ln a}$

Exemple 3 $\sqrt{2}^\pi = e^{\pi \ln \sqrt{2}} \simeq 2,97$ à 10^{-2}

Théorème 2 Pour tout réel $a > 0$ et tous réels b et c :

$a^b > 0$	$\ln a^b = b \ln a$	$a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$
$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$	$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$	$(a^b)^c = a^{bc}$

Théorème 3 Pour tous réels $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ et tout réel b :

$$(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}$$

Remarque 6 On retrouve les formules usuelles sur les puissances.

Remarque 7 La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a . Dans le cas où $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle.

Remarque 8 $\forall a > 0 : \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a$ donc $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

7 Fonction puissance

Théorème 4 Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de fonctions dérivables. De plus : $f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Remarque 9 On retrouve la formule connue si $\alpha \in \mathbb{Z}$. Par contre, si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable sur \mathbb{R} et si $-\alpha \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Théorème 5 Si u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I alors u^α est dérivable sur I et

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$$

Remarque 10 $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive sur I de $u' \cdot u^\alpha$

8 Croissance comparée de x^α avec $\alpha > 0$, $\ln x$ et e^x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \alpha \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - \frac{\alpha \ln x}{x})} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Conséquence : en posant $t = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^\alpha} = 0$