Intégrale

1 Définition

Définition 1 Si F est une primitive de f sur l'intervalle I et si a et b sont deux éléments de I, l'intégrale de f sur $[a;b]$ est le réel noté $\int_a^b f(x)\ dx$ défini par

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$$

Exemple 1 $\int_0^1 2x\ dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

Remarque 1 L'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.
Si G est une autre primitive de f sur I, alors $\forall x \in I : G(x) = F(x) + C$ d'où
$G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$

Remarque 2 x est une variable "muette". $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \cdots$

Le vérifier avec par exemple $\int_0^1 2x\ dx$ et $\int_0^1 2t\ dt$

Remarque 3 On n'a pas forcément $a \leq b$

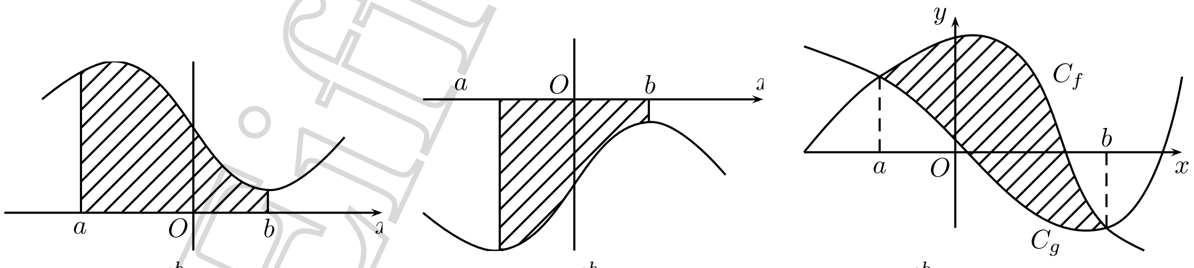
Remarque 4 $\boxed{\int_a^a f(x)\ dx = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx}$

Remarque 5 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$

2 Interprétation géométrique

On suppose f et g dérivables sur $[a;b]$
$\mathcal{A}$ représente l'aire de la partie hachurée, en unités d'aire :

$f \geq 0$ sur $[a;b]$ — $f \leq 0$ sur $[a;b]$ — $f \geq g$ sur $[a;b]$



$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\ dx$ — $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\ dx$ — $\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

L'unité d'aire est l'aire du rectangle (si le repère est orthogonal) de cotés OI et OJ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1 (relation de Chasles) Soit f dérivable sur un intervalle I et soient a, b et c des éléments de I.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx}$$

Théorème 2 Si f et g sont dérivables sur $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx}$$

Théorème 3 Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si λ est un nombre réel :

$$\boxed{\int_a^b \lambda.f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx}$$

Théorème 4 Si f est dérivable et positive sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$

Théorème 5 Si f et g sont dérivables sur $[a;b]$ et si $f \leq g$ sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$

Corollaire 1 (Inégalité de la moyenne)

Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si $\forall x \in [a;b] : m \leq f(x) \leq M : m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$

Définition 2 Si f est dérivable sur $[a;b]$ on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel

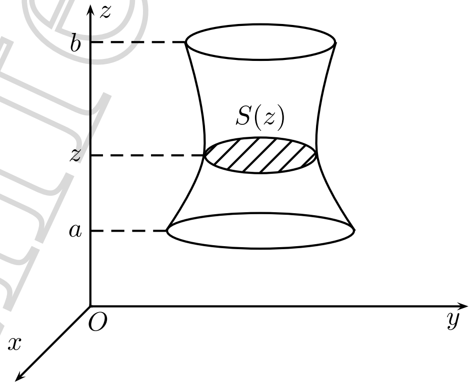
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

4 Volumes

4.1 Cas général

Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère un solide limité par deux plans de cotes respectives $z = a$ et $z = b$.
On suppose qu'un plan de cote z coupe le solide selon une surface d'aire $S(z)$.

Alors, le volume du solide est $\boxed{V = \displaystyle\int_a^b S(z)\ dz}$



4.2 Cas particulier

Si un solide de révolution de volume V est engendré par la rotation autour de l'axe Ox d'une surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ alors

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\ dx}$$