Limites

1 Limite d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$

1.1 Limite en 0

On considère des fonctions définies sur un intervalle I tel que 0 appartient à I ou est une extrémité de I.
L'observation des fonctions puissances conduit à poser

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x^3 = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0}$$

Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $|f(x)|$ est inférieur à 10^{-1}, $10^{-2}, \ldots,$ 10^{-p} dès que x est assez petit, on dit que f a pour limite 0 en 0 et on note $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Définition 1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} [f(x) - \ell] = 0$

Remarque 1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$

Exemple 1 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x^2\right) = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0} \left(4 + 2x^3\right) = 4$

1.2 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 2 Soit f définie sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I ou extrémité de I.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)}$$

Exemple 2 $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2 - 5\right) = \lim\limits_{h\to 0} \left((1+h)^2 - 5\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(h^2 - 4\right) = -4$

Théorème 1 Pour toute fonction usuelle f (fonction polynôme, fonction rationnelle, fonction racine carrée, fonction circulaire), si a appartient à l'ensemble de définition de f : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

1.3 Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

L'observation des fonctions suivantes conduit à poser :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$$

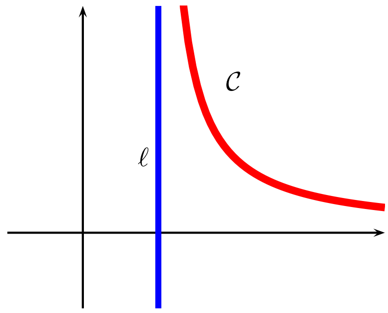
Notations : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty}$

On en déduit des calculs comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{1}{h} = +\infty$ que l'on note $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty}$

ou encore : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{1}{h} = -\infty$ que l'on note $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty}$

Interprétation géométrique

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



1.4 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1.4.1 Limite nulle

L'observation des fonctions suivantes conduit à poser :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \;;\; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \;;\; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \;;\; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \;;\; \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \;;\; \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0}$$

Plus généralement :

- Si $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $|f(x)|$ est inférieur à 10^{-1}, $10^{-2}, \ldots,$ 10^{-p} dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- Si $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $|f(x)|$ est inférieur à 10^{-1}, $10^{-2}, \ldots,$ 10^{-p} dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue, on dit que f a pour limite 0 en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

1.4.2 Limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Si $f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

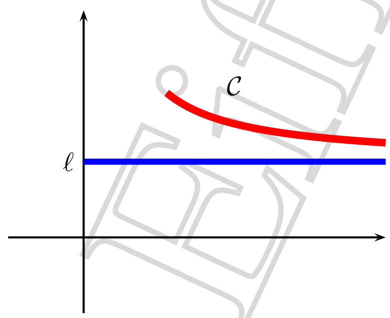
Exemple 3 Si $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty; a]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Si $f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

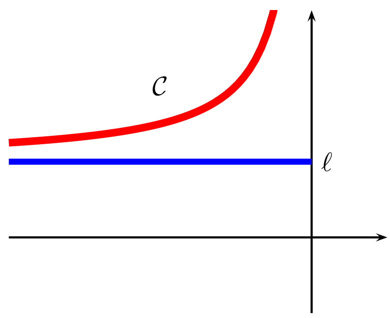
Exemple 4 Si $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Interprétation géométrique

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ vers $+\infty$



Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ vers $-\infty$



1.4.3 Limite infinie

L'observation des fonctions suivantes conduit à poser :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$$

Plus généralement :

- Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f(x) \geq 10^p$ dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f(x) \geq 10^p$ dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f(x) \leq -10^p$ dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f(x) \leq -10^p$ dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2 Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

2.1 Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Exemple 5 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}\right) = +\infty$

2.2 Produit par un réel $\lambda \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} [\lambda.f(x)]$
ℓ	$\lambda\ell$
$+\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$\begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$

Exemple 6 $\lim\limits_{x\to0} 3x^2 = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right) = +\infty$

2.3 Produit de 2 fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$
ℓ	ℓ'	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq 0$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } \ell>0 \\ -\infty \text{ si } \ell<0 \end{cases}$
$\ell\neq 0$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty \text{ si } \ell>0 \\ +\infty \text{ si } \ell<0 \end{cases}$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	forme indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 7 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=+\infty$ car $x^2-x=x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

2.4 Inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}$
$\ell\neq 0$	$\dfrac{1}{\ell}$
0	$\begin{cases} +\infty \text{ si } f(x)>0 \text{ au voisinage de } a \\ -\infty \text{ si } f(x)<0 \text{ au voisinage de } a \end{cases}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Exemple 8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\cos x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{\cos x}=-\infty$

2.5 Quotient de 2 fonctions

Écrire $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\dfrac{1}{g(x)}$

Remarque : Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$: Forme indéterminée. Idem si les deux limites sont infinies.

Exemple 9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

Exemple 10 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos 0=1$

Rappel : Si f est dérivable en a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

2.6 Fonction composée

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lambda \\ \lim\limits_{t\to\lambda} g(t)=\mu\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\mu$$

On peut retenir : si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lambda$ alors : $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\lim\limits_{t\to\lambda} g(t)$

Exemple 11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x+x^2}=\lim\limits_{t\to 1}\sqrt{t}=1$

2.7 Deux cas remarquables

2.7.1 Limite d'un polynôme à l'infini

Règle : Mettre le terme de plus haut degré en facteur.

Exemple 12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\right]=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=1$

2.7.2 Limite d'une fraction rationnelle à l'infini

Règle : Mettre en facteur les termes de plus haut degré de chaque polynôme.

Exemple 13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{4}{3x^2}\right)}{2x^2\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{7}{2x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{4}{3x^2}\right)}{2\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{7}{2x^2}\right)}=\dfrac{3}{2}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{4}{3x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{7}{2x^2}\right)=1$

3 Propriétés

3.1 Comparaison

Au voisinage de $+\infty$

Si, pour x assez grand :

- $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- $f(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
- $|f(x)-\ell|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$
- $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$
- $f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ell'$ alors : $\ell\leq\ell'$

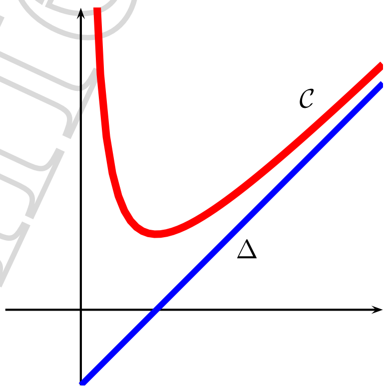
On a des résultats analogues au voisinage de $-\infty$: il suffit de remplacer les limites en $+\infty$ par des limites en $-\infty$ et de supposer les conditions réalisées pour x négatif et assez grand en valeur absolue.

Exemple 14 $\lim\limits_{x\to\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$ car $x+\sin x\geq x-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

Exemple 15 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ car $\left|\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)-1\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

4 Asymptote oblique

Si $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ alors la droite Δ d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=f(x)$ vers $+\infty$.



La position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ est donnée par le signe de $d = f(x) - (ax+b)$.
Si $d > 0$: $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ
Si $d < 0$: $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ.
De même vers $-\infty$:
Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ vers $-\infty$.

Exemple 16 La droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$ au voisinage de $+\infty$ car $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$