Fonction logarithme népérien

1 Définition

Définition 1 La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Conséquences.

1. ln est définie sur $]0;+\infty[$.
2. ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$: $\boxed{\ln' x = \dfrac{1}{x}}$
3. $\boxed{\ln 1 = 0}$
4. Si u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I, $\ln \circ u$ est dérivable sur I et
$$(\ln \circ u)' = \left(\ln' \circ u\right).u'$$
On en déduit : $\forall x \in I$: $(\ln [u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ formule qui s'abrège en : $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$
5. Si u est dérivable strictement positive sur I : $\ln(u)$ est une primitive sur I de $\dfrac{u'}{u}$
Si u est dérivable strictement négative sur I : $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{-u'}{-u}$ donc $\ln(-u)$ est une primitive sur I de $\dfrac{u'}{u}$
En résumé, si u est dérivable et ne s'annule pas sur I, $\boxed{\ln|u| \text{ est une primitive sur } I \text{ de } \dfrac{u'}{u}}$

Exemple 1 $\ln|x| = \ln(-x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$
$\ln|3x-2| = \ln(2-3x)$ est une primitive de $\dfrac{3}{3x-2}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$
$\ln|3x-2| = \ln(3x-2)$ est une primitive de $\dfrac{3}{3x-2}$ sur $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$
$\ln\left|x^2+1\right| = \ln\left(x^2+1\right)$ est une primitive de $\dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

2 Formule fondamentale

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(\lambda x)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{\lambda}{\lambda x} = \dfrac{1}{x}$
Deux primitives d'une même fonction différant d'une constante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \ln x + C$
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(\lambda x) = \ln x + C$.
$x = 1 \Rightarrow \ln\lambda = \ln 1 + C$ d'où $C = \ln\lambda$ et donc $\ln(\lambda x) = \ln x + \ln\lambda$.
Formule valable pour tout réel $\lambda > 0$ d'où le théorème :

Théorème 1 Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $b > 0$: $\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

Corollaire 1 Pour tout réel $b > 0$: $\boxed{\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b}$

Démonstration. Immédiat après avoir posé $a = \dfrac{1}{b}$ dans le théorème

Corollaire 2 Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $b > 0$: $\boxed{\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b}$

Démonstration. Ecrire $\ln \dfrac{a}{b} = \ln \left(a \dfrac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b}$

Corollaire 3 Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n : $\boxed{\ln a^n = n \ln a}$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln a^n = \ln (a.a.a. \dots a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = n \ln a$
$\ln a^{-n} = \ln \dfrac{1}{a^n} = -\ln a^n = -n \ln a$
$\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln a$

Définition 2 Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sqrt[n]{a}$ le nombre positif qui, élevé à la puissance n donne a

Corollaire 4 Pour tout réel $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\ln \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \ln a}$ en particulier : $\boxed{\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a}$

Démonstration. $\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a \Rightarrow \ln \left(\sqrt[n]{a} \right)^n = \ln a \Rightarrow n \ln \sqrt[n]{a} = a \Rightarrow \ln \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \ln a$

3 Étude le la fonction ln

3.1 Variations

Sur $]0; +\infty[$: $\ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$
La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit :
Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $b > 0$:

1. $\boxed{a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b}$
2. $\boxed{a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b}$

3.2 Limites

1. On admettra que pour tout réel $a > 0$: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a}$
2. La fonction ln étant strictement croissante : $\ln 2 > \ln 1 \Rightarrow \ln 2 > 0$
   On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln 2 = +\infty$ c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty$.
   $\ln 2^n$ peut donc être aussi grand que l'on veut, à condition de choisir n suffisamment grand.
   La fonction ln étant strictement croissante : $x > 2^n \Rightarrow \ln x > \ln 2^n$.
   Donc $\ln x$ peut être aussi grand que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment grand.
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$
3. En posant $t = \dfrac{1}{x}$ on obtient : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} (-\ln t) = -\infty$
   $$\boxed{\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty}$$

Rappel : Si f est dérivable et strictement croissante sur $[a; b]$ alors pour tout réel $\lambda \in [f(a); f(b)]$ il existe un réel unique $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = \lambda$.
On dit alors que f réalise une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$.

Ce théorème se généralise en remplaçant $[a; b]$ par $]0; +\infty[$ et $[f(a); f(b)]$ par $\left] \lim\limits_{x \to 0} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$.
La fonction ln réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc un nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien vaut 1. On le note e
On a donc $\boxed{\ln e = 1}$ $e \simeq 2,718281828.....$

Remarque 1 Pour tout entier relatif n : $\ln e^n = n \ln e = n$

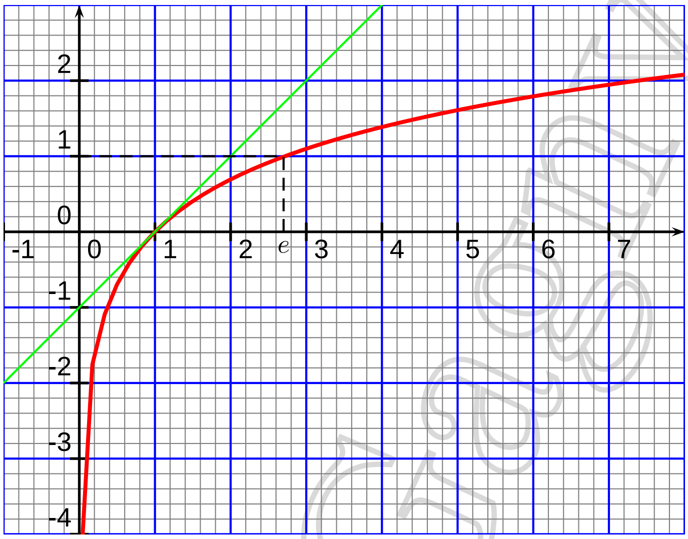
Remarque 2 $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2} \ln e = \dfrac{1}{2}$

Remarque 3 $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}} = -\ln \sqrt{e} = -\dfrac{1}{2}$

Remarque 4 $\ln \sqrt[n]{e} = \dfrac{1}{n} \ln e = \dfrac{1}{n}$

3.3 Courbe

Connaissant les variations et deux points remarquables, on peut de plus préciser la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 1 : $y - f(1) = f'(1).(x-1)$ ce qui donne : $y = x - 1$



3.4 Limites remarquables

1. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ conséquence de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ avec $f(x) = \ln(1+x)$
2. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$ *admis*
3. Pour tout entier n non nul : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$ vrai pour $n = 1$ et conséquence de $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x}{x} \dfrac{1}{x^{n-1}}$ pour $n > 1$
4. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0}$ car $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-\ln t}{t} = 0$