Probabilités

1 Probabilités sur un ensemble fini

Définition 1 On appelle univers des possibles, et on note Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (expérience dont on ne peut prédire à l'avance le résultat). Un élément de Ω est appelé événement élémentaire.

Définition 2 Un événement est un sous-ensemble (ou partie) de Ω.
L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Remarque 1 Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\varnothing$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 L'événement (A ou B) noté $A \cup B$ est composé des événements élémentaires appartenant à A ou à B ou aux deux.

Définition 4 L'événement (A et B) noté $A \cap B$ est composé des événements élémentaires appartenant à la fois à A et à B.

Définition 5 L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est composé des événements élémentaires qui n'appartiennent pas à A.

Définition 6 Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque 2 Ω est réunion disjointe de tous les événements élémentaires.

Fréquence d'un événement :
Soit A un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions. La fréquence de A est $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$. L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p. Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.
Propriétés des fréquences *(qui conduisent à la définition 7) :*

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé : $n_\Omega = n$
2. $f_n(A) \in [0;1]$ car $0 \leq n_A \leq n$
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

Définition 7 On appelle probabilité toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : 0 \leq P(A) \leq 1}$
2. $\boxed{A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
3. $\boxed{P(\Omega) = 1}$

Proposition 1 $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ et $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

Démonstration.
$A \cap \bar{A} = \varnothing \Rightarrow P\left(A \cup \bar{A}\right) = P(A) + P\left(\bar{A}\right) \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P\left(\bar{A}\right) \Rightarrow 1 = P(A) + P\left(\bar{A}\right)$
$\varnothing = \bar{\Omega} \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$

Théorème 1 Pour tout événement A et tout événement B : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Démonstration. La disposition sous forme de tableau est très pratique

$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{B}$
A	$\bar{A}$	

La première colonne du tableau représente l'événement A
La première ligne du tableau représente l'événement B
Le tableau entier représente Ω

$A \cup B$ est réunion disjointe de A et $\left(\bar{A} \cap B\right)$

donc $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(\bar{A} \cap B\right)$

B est réunion disjointe de $\left(A \cap B\right)$ et $\left(\bar{A} \cap B\right)$

donc $P\left(B\right) = P\left(A \cap B\right) + P\left(\bar{A} \cap B\right)$ d'où $P\left(\bar{A} \cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$.

D'où le résultat.

Définition 8 On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.
C'est la cas lorsqu'on effectue un tirage au hasard ou lorsqu'on lance une pièce ou un dé bien équilibré.

Théorème 2 S'il y a équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}$

Démonstration. Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$: $P\left(\Omega\right) = P\left(\omega_1\right) + P\left(\omega_2\right) + \cdots + P\left(\omega_n\right)$.
$P\left(\omega_1\right) = P\left(\omega_2\right) = \cdots = P\left(\omega_n\right) = p \Rightarrow 1 = np$ d'où $p = \dfrac{1}{n}$
Si $A = \{\omega_{A_1}; \omega_{A_2}; \ldots; \omega_{A_k}\}$ alors $P\left(A\right) = P\left(\omega_{A_1}\right) + P\left(\omega_{A_2}\right) + P\left(\omega_{A_k}\right) = kp = \dfrac{k}{n}$

2 Variable aléatoire

2.1 Définitions

Définition 9 On appelle variable aléatoire (ou aléa) définie sur un univers Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 (de base) On lance deux fois de suite un dé équilibré. On note X la variable aléatoire associant à l'issue de ces deux lancers le nombre de piles obtenus.
On a $\Omega = \{(F, F); (P; P); (P; F); (F; P)\}$ en notant P : "on obtient pile" et F : "on obtient face".
$X\left(F; F\right) = 0$; $X\left(P; P\right) = 2$; $X\left(P; F\right) = 1$ et $X\left(F; P\right) = 1$
L'ensemble des valeurs prises par X est $X\left(\Omega\right) = \{0; 1; 2\}$

Notations :
- $(X = \alpha) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = \alpha\}$
- $(X \leq \alpha) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq \alpha\}$
- $(a < X \leq b) = \{\omega \in \Omega \ / \ a < X(\omega) \leq b\}$
- etc...

Exemple 2 Si on reprend l'exemple de base :
$(X = 1) = \{(P; F); (F; P)\}$ et $(0 < X \leq 2) = \{(P; F); (F; P); (P; P)\}$

Remarque 3 Si $X\left(\Omega\right) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ alors Ω est la réunion disjointe des événements $\left(X = x_k\right)$.
On en déduit $P(\Omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X = x_k)$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$.

2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 10 On appelle loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire discrète X définie sur l'univers Ω l'application de $X(\Omega)$ dans $[0;1]$ qui à chaque valeur x_k de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité de l'événement $(X = x_k)$.

Remarque 4 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X se présente généralement sous la forme d'un tableau de valeurs et se représente à l'aide d'un diagramme en bâtons ou d'un histogramme.

Exemple 3 Toujours avec l'exemple de base, la loi de X est :

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie que $\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

2.3 Espérance mathématique ; Variance ; Ecart-type

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et soit Ω l'univers des possibles. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

Définition 11 On appelle espérance mathématique (ou espérance) de X et on note $E(X)$ le nombre défini par

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)}$$

Exemple 4 Dans l'exemple de base : $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$

Remarque 5 $E(X)$ représente la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la moyenne des valeurs prises par X à l'issue de n répétitions de $\mathcal{E}$. C'est pour cette raison que $E(X)$ s'appelle aussi moyenne de la variable aléatoire X.

Définition 12 On appelle variance de X et on note $V(X)$ ou $\sigma^2(X)$ le nombre défini par

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$$

Théorème 3 $\boxed{\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

Définition 13 L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}}$

Exemple 5 Dans l'exemple de base : $E\left(X^2\right) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

D'où $\sigma^2(X) = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.4 Fonction de répartition

Définition 14 On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X définie sur l'univers Ω l'application $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ définie par : $\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$

Remarque 6 F est une fonction croissante et $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$

Remarque 7 Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ alors :

- $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$. Par exemple, si $x_2 \leq x < x_3$: $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
- Si $x < x_1$ on a $F(x) = 0$
- Si $x \geq x_n$ on a $F(x_n) = 1$
- F est constante sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}[$. C'est une fonction en escalier dont la représentation graphique présente un saut au point d'abscisse x_k de valeur $P(X = x_k)$.

Exemple 6 Reprenant l'exemple de base, la fonction de répartition de X a pour représentation :