

Suites

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition

(u_n) arithmétique $\Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ r est la raison.

Remarque 1 Pour montrer qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r , il suffit de montrer que pour tout entier $n : u_{n+1} - u_n = r$

1.2 Expression de u_n en fonction de n et de r

Si le premier terme est u_0 et la raison $r : u_n = u_0 + nr$

Si le premier terme est u_1 et la raison $r : u_n = u_1 + (n - 1)r$

Remarque 2 $\boxed{u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison})}$

1.3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Lemme 1 $\boxed{1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

$$S = (n+1) \left(\frac{2u_0 + nr}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

Si le premier terme est u_0 et la raison $r : S = u_0 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

Si le premier terme est u_1 et la raison $r : S = u_0 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = n \frac{u_1 + u_n}{2}$

Remarque 3 $\boxed{S = (\text{nombre de termes}) \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right)}$

2 Suites géométriques

2.1 Définition

(u_n) géométrique $\Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$ q est la raison.

Nous supposons dans la suite que le premier terme ainsi que la raison sont non nuls.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$

Remarque 4 Pour montrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique de raison q , il suffit de montrer que pour tout entier $n : \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

2.2 Expression de u_n en fonction de n et de q

Si le premier terme est u_0 et la raison $r : u_n = q^n \times u_0$

Si le premier terme est u_1 et la raison $r : u_n = q^{n-1} \times u_1$

Remarque 5 $u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}$

2.3 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Lemme 2 Si $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Si le premier terme est u_0 et la raison $r : \mathcal{S} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Si le premier terme est u_1 et la raison $r : \mathcal{S} = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Remarque 6 $\mathcal{S} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$

3 Comportement global d'une suite

Définition 1 Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- (u_n) stationnaire $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n$
- (u_n) croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) strictement croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n$
- (u_n) décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < u_n$
- (u_n) monotone $\Leftrightarrow (u_n)$ croissante ou décroissante
- (u_n) strictement monotone $\Leftrightarrow (u_n)$ strictement croissante ou strictement décroissante

Exemple 1 La suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2 est strictement croissante.

Exemple 2 La suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$ est strictement décroissante.

Exemple 3 La suite géométrique de terme général q^n est stationnaire si $q = 1$, strictement croissante si $q > 1$ et strictement décroissante si $0 < q < 1$

Théorème 1 Si f est croissante (resp. décroissante) sur \mathbb{R}_+ alors la suite de terme général $u_n = f(n)$ est croissante (resp. décroissante)

4 Limites

ℓ désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2 Si $u_n = f(n)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Théorème 3

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Théorème 4 Si $q > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < q < 1 \end{cases}$

Théorème 5 Les théorèmes de comparaison pour les suites et les fonctions sont analogues.

Exemple 4 La suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n} \cos n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

En effet : $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq \cos \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ d'où le résultat (théorème d'encadrement)

Eiffel - Gagny